



Analyse spectrale des signaux échantillonnés



Jean-Philippe MULLER

Décembre 2000

Sommaire

Les propriétés du signal échantillonné :

- 1) L'opération d'échantillonnage
- 2) Le signal d'échantillonnage
- 3) Allure du spectre d'un signal échantillonné
- 4) Règle d'échantillonnage de Shannon
- 5) Rôle du filtre anti-repliement

La transformée de Fourier discrète :

- 6) Calcul du spectre par transformée de Fourier discrète
- 7) Exemple de calcul de la TFD
- 8) Réalisation logicielle
- 9) Calcul de la TFD d'un signal sinusoïdal
- 10) Choix de la forme de la fenêtre
- 11) Exemple d'utilisation d'une fenêtre triangulaire
- 11) Applications à l'analyse de signaux complexes
- 12) Applications à l'utilisation de la FFT en médecine

1) L'opération d'échantillonnage :

Avec l'utilisation croissante des techniques numériques dans le traitement du signal (filtrage numérique, transformée de Fourier discrète, disque compact, etc ...), une nouvelle catégorie de signaux est apparue : les signaux analogiques échantillonnés.

L'échantillonneur prélève les valeurs du signal à des intervalles de temps égaux (la période d'échantillonnage T_e).

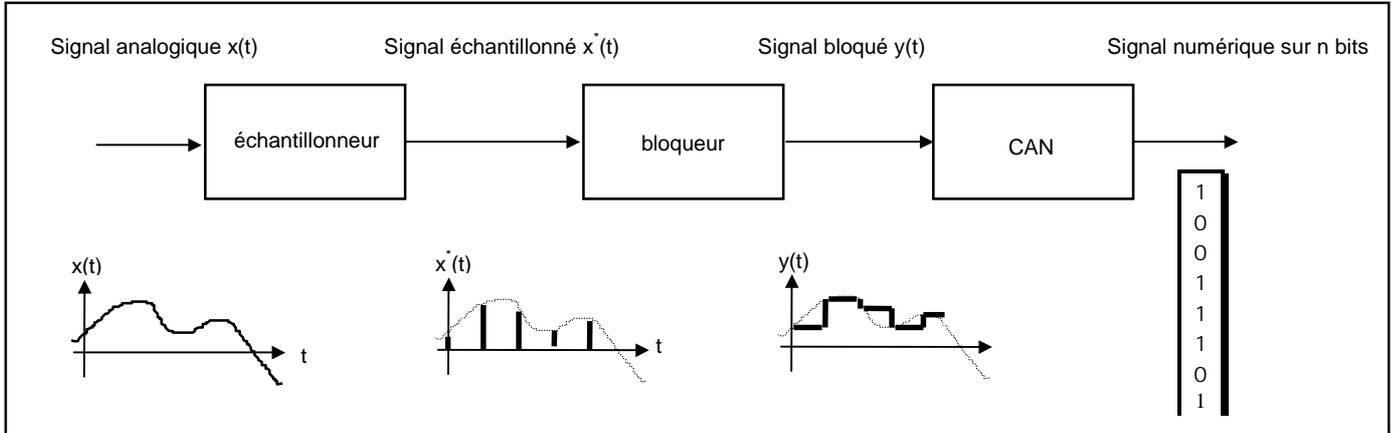


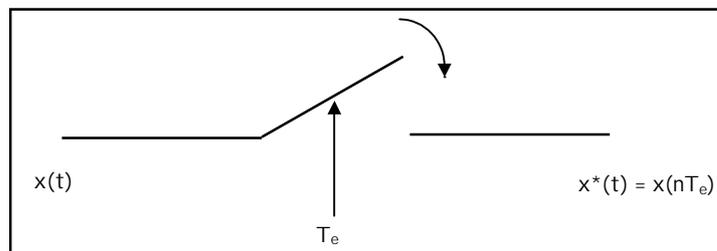
Figure 1. Acquisition d'un signal analogique

L'échantillonnage modifie la forme du signal et donc son spectre .

Pour échantillonner un signal analogique continu $x(t)$ et le transformer en une suite discrète d'échantillons $x^*(t)$, on prélève périodiquement à des intervalles de temps T_e la valeur du signal.

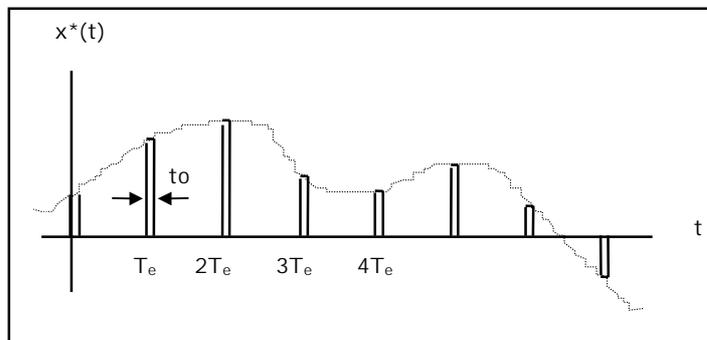
Cette fonction de prélèvement d'échantillons est assurée par un commutateur analogique K qui se ferme durant un temps t_0 très bref toutes les T_e secondes. Ce temps t_0 s'appelle temps d'ouverture de la porte d'échantillonnage.

Figure 2.
L'opération
d'échantillonnage



Le signal échantillonné est constitué par un train d'impulsions espacées de T_e , de largeur t_0 et d'amplitude $x(nT_e)$.

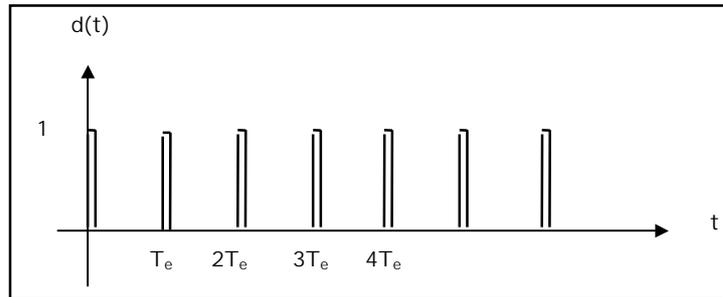
Figure 3.
Allure du signal
échantillonné



2) Le signal d'échantillonnage :

On peut considérer que ce signal échantillonné $x^*(t)$ peut être obtenu à partir du signal analogique $x(t)$ en le multipliant par le signal d'échantillonnage $d(t)$ suivant :

Figure 4.
Le signal
d'échantillonnage



Le signal d'échantillonnage $d(t)$ est caractérisé par une période de répétition T_e , une largeur t_0 et une amplitude unité

On écrira donc :

$$x^*(t) = x(t).d(t)$$

Cette manière de voir permet de mettre en évidence simplement les effets de l'échantillonnage sur le spectre du signal $x(t)$.

Le signal d'échantillonnage $d(t)$ est un signal périodique dont la décomposition en série de Fourier contient une valeur moyenne d_0 , un fondamental d_1 à la fréquence $f_e = 1/T_e$ et des harmoniques d_n :

$$d(t) = d_0 + d_1.\cos(\omega_e t) + d_2.\cos(2\omega_e t) + \dots + d_n.\cos(n.\omega_e t) + \dots$$

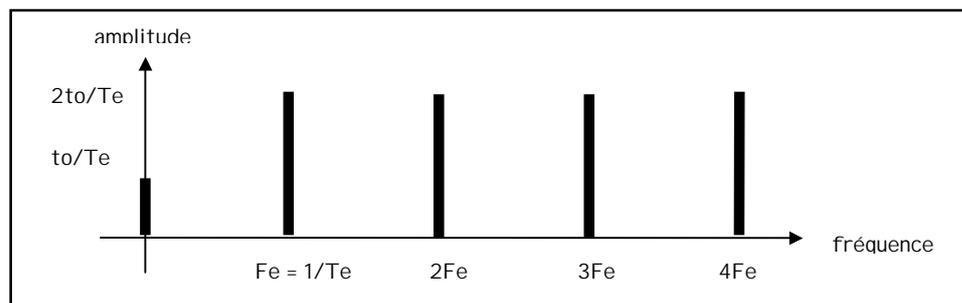
$$\text{avec } d_0 = t_0/T_e \quad \text{et} \quad d_n = \frac{2.\sin(n\pi t_0/T_e)}{n\pi}$$

Comme la durée d'ouverture t_0 est faible par rapport à la période d'échantillonnage T_e , l'angle $n\pi t_0/T_e$ est petit et on pourra confondre le sinus avec l'angle pour les premiers harmoniques, soit :

$$d_n \approx 2. n\pi t_0/T_e. n\pi \approx 2t_0/T_e$$

Le début du spectre de $d(t)$ a donc l'allure suivante :

Figure 5.
Spectre du
signal $d(t)$



Le signal échantillonné $x^*(t)$ s'écrit alors :

$$x^*(t) = x(t).d(t) = x(t). \left(t_0/T_e + 2 t_0/T_e. \cos(\omega_e t) + 2 t_0/T_e. \cos(2\omega_e t) + \dots \right)$$

$$= x(t). t_0/T_e + 2 t_0/T_e.x(t). \cos(\omega_e t) + 2 t_0/T_e.x(t). \cos(2\omega_e t) + \dots$$

On constate que le signal échantillonné est beaucoup plus riche puisqu'il contient des termes à tous les multiples de la fréquence d'échantillonnage f_e .

3) Allure du spectre du signal échantillonné :

Plaçons nous dans le cas particulier simple où le signal échantillonné $x(t)$ est sinusoïdal :

$$x(t) = A \cos(\Omega t)$$

Son spectre est donc formé d'une raie à F .

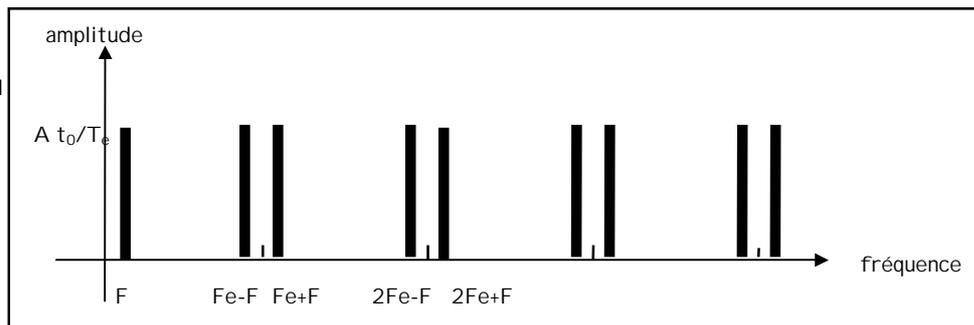
Le signal échantillonné s'écrit alors :

$$x^*(t) = t_0/T_e \cdot A \cos(\Omega t) + 2 t_0/T_e \cdot A \cos(\Omega t) \cdot \cos(\omega_e t) + 2 t_0/T_e \cdot A \cos(\Omega t) \cdot \cos(2\omega_e t) + \dots$$

$$= t_0/T_e \cdot A \cos(\Omega t) + t_0/T_e \cdot A (\cos(\omega_e - \Omega)t + \cos(\omega_e + \Omega)t) + t_0/T_e \cdot A (\cos(2\omega_e - \Omega)t + \cos(2\omega_e + \Omega)t) + \dots$$

et le spectre du signal sinusoïdal échantillonné $x^*(t)$ a l'allure suivante :

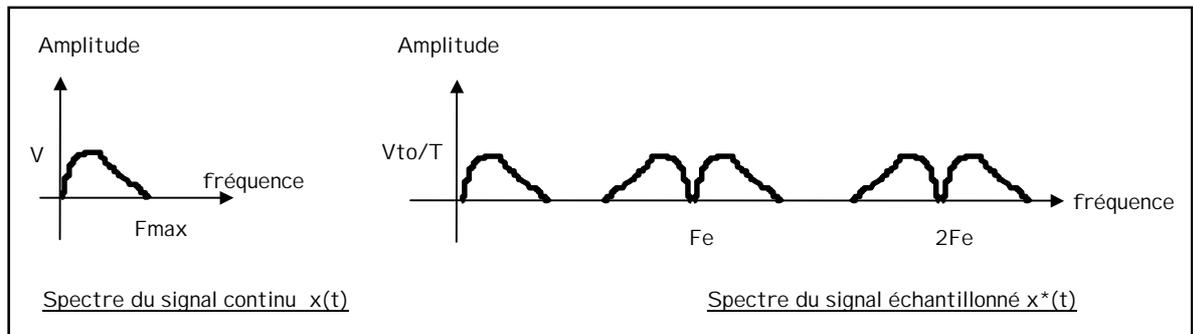
Figure 6.
Spectre d'un
signal sinusoïdal
échantillonné



On obtient le spectre de $x^*(t)$ en reproduisant le spectre de $x(t)$ autour de chaque multiple de la fréquence d'échantillonnage F_e .

Ce résultat se généralise à un signal $x(t)$ de forme **quelconque** et permet de dessiner sans peine le spectre du signal échantillonné $x^*(t)$ correspondant :

Figure 7.
Spectre d'un
signal réel
échantillonné



Le signal échantillonné a un spectre extrêmement riche, ce qui était évident à priori puisqu'il s'agit d'un train d'impulsions très fines.

Cette grande étendue spectrale ne pose pas de problème puisque ce signal n'est pas destiné à être amplifié, mais sera immédiatement bloqué puis converti en signal numérique.

Néanmoins cette décomposition un peu théorique il est vrai entre l'échantillonneur et le bloqueur nous permet de mettre en évidence de façon simple les règles qu'il faut respecter pour une acquisition correcte.

4) Règle d'échantillonnage de Shannon :

Une conséquence fondamentale du résultat précédent est le choix de la fréquence d'échantillonnage pour un signal donné.

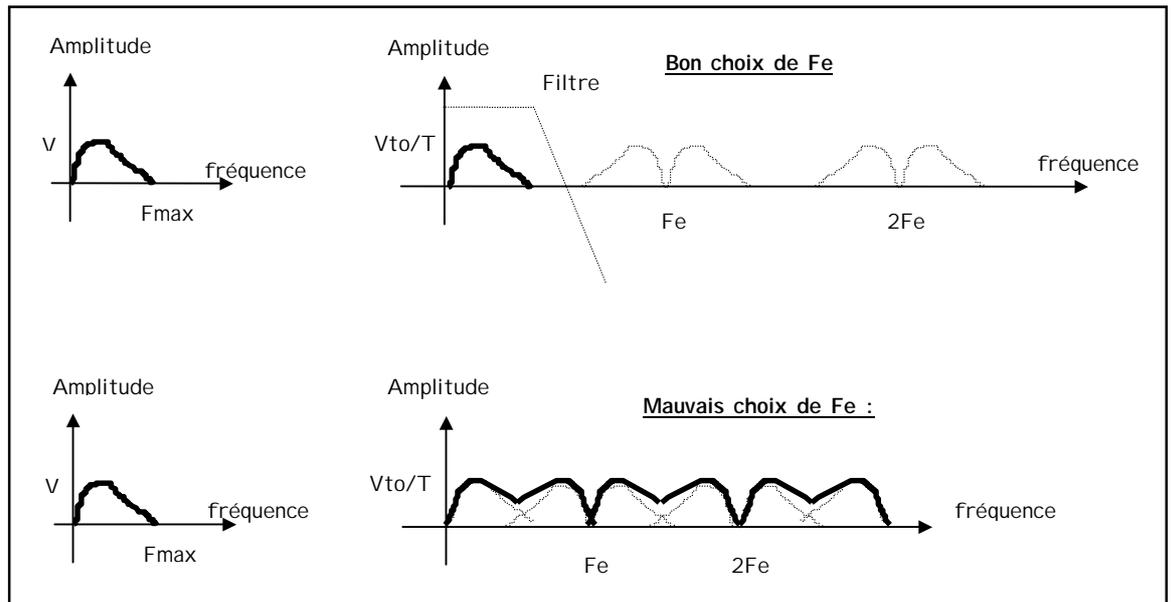
En effet, l'opération d'échantillonnage ne doit pas amener une perte d'informations. Autrement dit l'opération d'échantillonnage doit être réversible et on doit pouvoir repasser du signal échantillonné au signal initial.

On voit facilement que ceci n'est possible que si la fréquence F_e est suffisamment élevée, d'où le résultat fondamental :

Si on ne veut pas perdre d'information, il faut que la fréquence d'échantillonnage soit au moins égale au double de la fréquence maximale F_{max} contenue dans le signal.

Dans ce cas, on pourra revenir en arrière par simple filtrage passe-bas.

Figure 8.
Comment
choisir f_e



Dans la pratique, la règle de Shannon nous conduit aux choix suivants :

- **Son en qualité téléphonique** : $F_{max} = 3$ kHz et $F_e = 8$ kHz
Chaque échantillon est codé sur 8 bits, soit un débit $D = 8.8000 = 64$ kbits/s
- **Son en qualité hi-fi** : $F_{max} = 20$ kHz et $F_e = 44,1$ kHz
Codage en stéréo sur 16 bits, soit un débit $D = 2.16.44100 = 1,41$ Mbits/s

5) Rôle du filtre anti-repliement :

Le bon choix de F_e nécessite de bien connaître la valeur de F_{max} , fréquence maximale contenue dans le signal à échantillonner.

A ce niveau, il ne faut pas confondre la fréquence maximale utile (par exemple 20 kHz pour la musique) avec la fréquence maximale effectivement présente dans le signal qui est toujours supérieure à la fréquence précédente (bruit produit par le préamplificateur du micro au delà de 20 kHz par exemple).

Pour prendre un exemple un peu humoristique, plaçons-nous dans la situation de l'enregistrement numérique d'un musicien en studio.

Le pianiste joue son morceau, la musique est enregistrée à l'aide d'un microphone qui, avec son préamplificateur, a une bande passante de 40 kHz. Personne n'a remarqué la chauve-souris qui dormait dans l'instrument et qui, réveillée par la musique, pousse des cris parfaitement inaudibles puisque dans la bande ultrasonore.

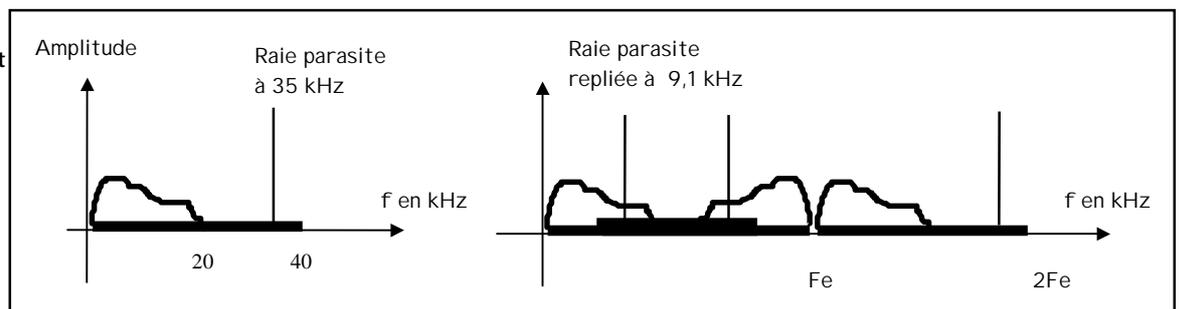
Le microphone fournit donc un signal électrique composé:

- de la musique produite par le musicien et son instrument dans la bande 20 Hz-20 kHz
- de bruit électrique à densité spectrale constante dans la bande 0-40 kHz
- du cri de la chauve-souris à 35 kHz

L'ingénieur du son choisit une fréquence d'échantillonnage $F_e = 44,1$ kHz en pensant respecter parfaitement la règle de Shannon. C'est parfaitement vrai pour la musique, mais pas pour le bruit, ni pour le cri de la chauve-souris.

Le spectre du signal échantillonné est alors le suivant :

Figure 9.
Exemple d'effet
de repliement
de spectre



On constate l'apparition dans la bande audio par repliement de spectre :

- du cri de la chauve-souris à $44,1 - 35 = 9,1$ kHz qui est devenu audible
- d'une augmentation de bruit de fond qui vient du bruit au-delà de 20 kHz replié vers les basses-fréquences

Pour éviter ces problèmes, il faut s'assurer que le spectre est vraiment limité à F_{max} . La meilleure façon de s'en assurer est de placer un filtre à coupure raide qui supprimera tous les signaux parasites au-delà de la fréquence limite F_{max} : c'est le **filtre anti-repliement**.

Ce filtre sera placé à l'entrée du système d'acquisition, avant l'échantillonneur.

6) Calcul du spectre d'un signal échantillonné par DFT :

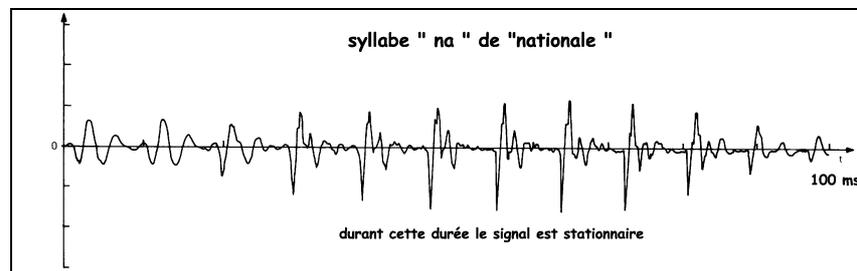
Pour de tels signaux (audio, vidéo, bruit de fond, etc ...) nous ne connaissons plus l'expression mathématique $x(t)$ du signal. Il n'existe donc plus de méthode mathématique pour en déterminer le spectre.

Suivant la gamme de fréquences contenues dans le signal à analyser, deux techniques de mesure du spectre sont très largement utilisées aujourd'hui et ont donné naissance à 2 grandes familles d'analyseurs de spectre :

- les analyseurs numériques à transformée de Fourier discrète pour les fréquences basses (inférieures à 10 MHz environ)
- les analyseurs à changement de fréquence pour les signaux de fréquences plus élevée (jusqu'à 60 GHz actuellement)
- l'analyse spectrale par batterie de filtres sélectifs juxtaposés n'est utilisée que dans des applications très ponctuelles (chaînes hi-fi par exemple).

Une caractéristique importante des spectres de ce type de signaux est qu'ils sont par essence variables ou dynamiques, par opposition aux spectres de signaux périodiques qui sont stables ou statiques.

Figure 10.
Allure temporelle d'un signal audio



On constate que l'allure du signal reste **stationnaire** et **pseudo-périodique** durant une bonne partie de la syllabe. Pendant tout ce temps (soit environ 30 à 40 ms) le spectre du signal audio restera stable.

Par échantillonnage et conversion analogique-numérique, il est aujourd'hui facile de faire l'acquisition d'un signal $x(t)$ par un ordinateur. Après cette opération d'acquisition, on aura donc, dans la mémoire du système, une suite de N valeurs numériques $x_0 = x(0)$, $x_1 = x(T_e)$... $x_n = x(nT_e)$...

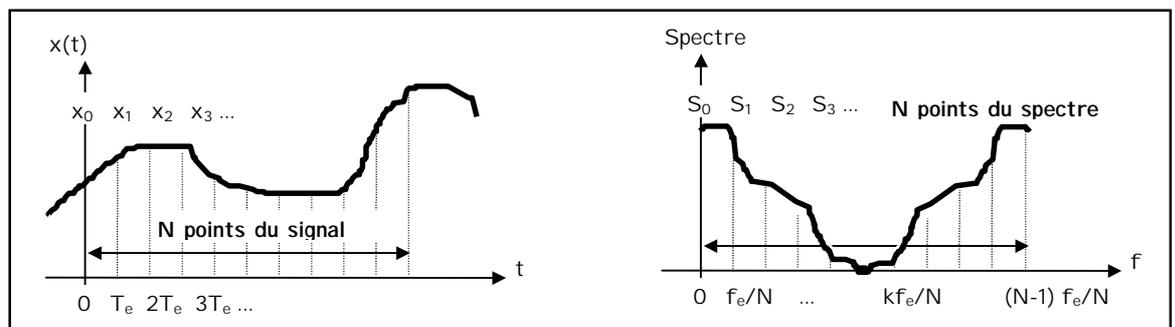
L'échantillonnage lui-même se fait à une fréquence f_e et la prise de N échantillons dure un temps T tel que :

$$T = N \cdot T_e = N / f_e \quad \text{largeur de la fenêtre d'analyse}$$

A partir de ces N échantillons, on peut calculer N points du spectre définis par leur abscisse $f(k)$ et leur ordonnée $S(k)$ en utilisant la transformée de Fourier discrète définie par :

- **fréquence** : $f(k) = k \cdot f_e / N$ avec $k = 0, 1, 2 \dots N-1$
- **amplitude** : $S(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2j\pi n k / N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi n \cdot k / N) - j \sin(2\pi n \cdot k / N)]$

Figure 11.
 N échantillons donnent N points du spectre



7) Exemple de calcul de la DFT dans un cas simple :

Le spectre du signal échantillonné a des caractéristiques particulières :

- le signal étant échantillonné, le spectre obtenu est forcément symétrique par rapport à $f_e/2$, ce qui veut dire que seuls la première moitié des points calculés est effectivement utilisée pour tracer le spectre
- si on veut un spectre précis, il suffit d'augmenter le nombre de points du signal et donc la durée de l'échantillonnage
- le nombre de calculs et donc la durée du traitement mathématique augmente très vite avec le nombre N d'échantillons

Si on dispose de $N = 10$ échantillons du signal et $f_e = 1$ kHz

- 1^{er} calcul : $k = 0$ **fréquence** $f(0) = 0$

$$\text{amplitude } S(0) = \frac{1}{10} [x(0) + x(1) + x(2) + \dots + x(N-1)] = X_{\text{moyen}}$$

On retrouve le résultat bien connu que la composante spectrale à la fréquence nulle correspond à la valeur moyenne du signal

- 2^{ème} calcul : $k = 1$ **fréquence** $f(1) = f_e/N = 100$ Hz

$$\text{amplitude } S(1) = \frac{1}{10} \left\{ \begin{array}{l} x(0) [\cos(2.0\pi.1/10) - j \sin(2.0\pi.1/10)] \\ + x(1) [\cos(2.1\pi.1/10) - j \sin(2.1\pi.1/10)] \\ + \dots \\ + x(N-1) [\cos(2.2\pi.1/10) - j \sin(2.2\pi.1/10)] \end{array} \right\}$$

$S(1)$ est l'amplitude du spectre à la fréquence de 100 Hz

... etc ...

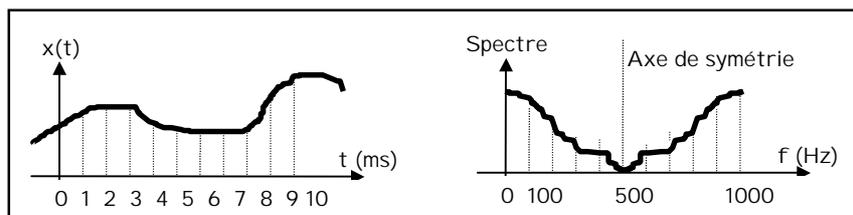
- 10^{ème} calcul : $k = 9$ **fréquence** $f(9) = 9f_e/N = 900$ Hz

$$\text{amplitude } S(9) = \frac{1}{10} \left\{ \begin{array}{l} x(0) [\cos(2.0\pi.9/10) - j \sin(2.0\pi.9/10)] \\ + x(1) [\cos(2.1\pi.9/10) - j \sin(2.1\pi.9/10)] \\ + \dots \\ + x(N-1) [\cos(2.2\pi.9/10) - j \sin(2.2\pi.9/10)] \end{array} \right\}$$

$S(9)$ est l'amplitude du spectre à la fréquence 900 Hz.

Nous constatons qu'à partir des 10 échantillons du signal nous pouvons calculer sans difficulté particulière (calculs de cosinus et de sinus, additions et multiplications) 10 points du spectre.

Figure 12.
10 échantillons
= 10 points du
spectre



8) Réalisation logicielle :

Voici un petit logiciel en BASIC qui calcule la transformée de Fourier discrète d'échantillons $X(l)$ entrés au clavier :

Figure 13.
Calcul en Basic
de la TFD

```

INPUT « NOMBRE D'ECHANTILLONS : » ; N
DIM R(N) : DIM X (N) : DIM A (N) : DIM B (N)
DIM F(N) : PRINT
INPUT « FREQUENCE D'ECHANTILLONNAGE : » ; FE
REM : ENTREE DES DONNEES
FOR I = 1 TO N
PRINT « X(« ; I ; « ) = « ; : INPUT X(I)
NEXT I
REM : CALCUL DES RAIES
PRINT « FREQUENCE AMPLITUDE »
FOR K = 1 TO N
REM : CALCUL DE LA PARTIE REELLE
A(K) = 0
FOR I = 1 TO N
A(K) = A(K) + X(I) * COS ( 2 * 3.1416 * K * I / N)
NEXT I
REM : CALCUL DE LA PARTIE IMAGINAIRE
B(K) = 0
FOR I = 1 TO N
B(K) = B(K) + X(I) * SIN ( 2 * 3.1416 * K * I / N)
NEXT I
REM : CALCUL DU MODULE
R(K) = SQR (A(K) ^ 2 + B(K) ^ 2 )
R(K) = R(K) * 2 / N
F(K) = K * FE / N
PRINT F(K) ; «   » ; R(K)
NEXT K

```

Les calculs effectués pour les différentes valeurs de l appliquent autant de filtres passe-bande de fréquence centrale $f(l) = l.f_e/N$ au signal.

On comprend donc aisément que le spectre obtenu sera d'autant plus précis que l'incrément en fréquence sera faible et donc que le nombre de points du signal échantillonné sera élevé.

La TFD nécessite de nombreux calculs. Pour 1024 points, il faut effectuer 1048576 additions et multiplications ce qui rend pratiquement impossible le calcul du spectre en temps réel.

Malgré un intérêt évident de la communauté scientifique, il a fallu attendre 1965 et la publication par Cooley et Turkey de leur algorithme mathématique, le fameux **Fast Fourier Transform**, pour disposer d'un procédé de calcul performant, divisant par 100 le temps de calcul qui est maintenant possible en temps réel.

9) Calcul de la TFD d'un signal sinusoïdal :

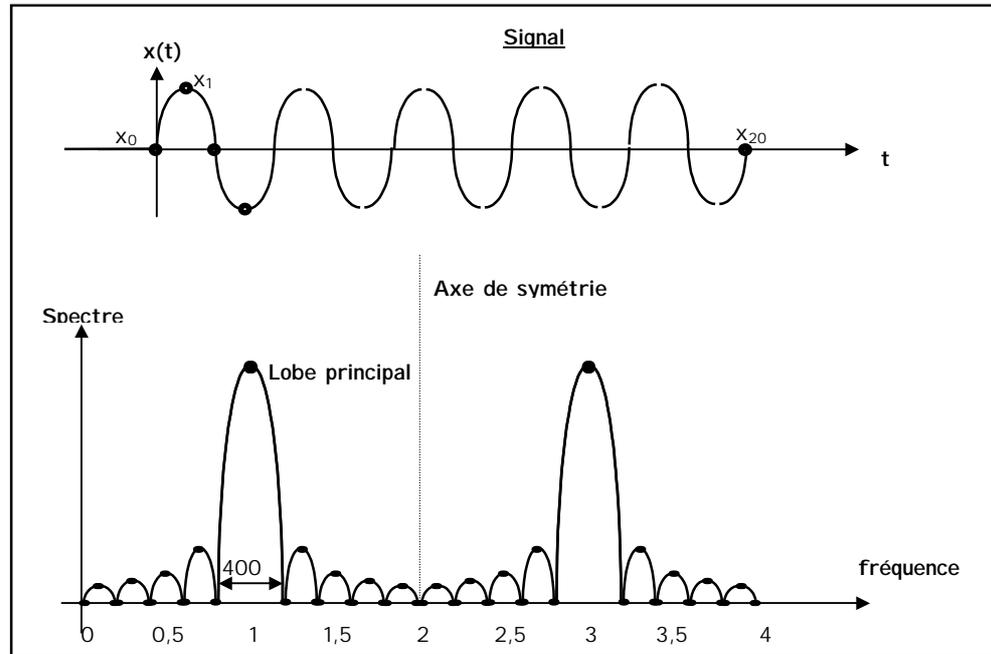
Calculons le spectre de : $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ avec $f_0 = 1$ kHz

Ce signal a été échantillonné à $f_e = 4$ kHz et on a pris $N = 20$ échantillons. Il a donc été analysé à travers une fenêtre temporelle de largeur $T = 20 \cdot T_e = 5$ ms.

Les 20 échantillons nous donnent 20 points du spectre, ce qui est insuffisant pour tracer la courbe avec précision. Nous avons donc rajouté 20 échantillons nuls ce qui nous donne 40 points. C'est une méthode souvent utilisée lorsque le nombre de points de signal dont on dispose est insuffisant.

Les résultats du calcul est le suivant :

Figure 14.
TFD d'un signal
sinusoïdal



Nous y retrouvons :

- **un pic à 1 kHz** ce qui valide l'algorithme
- **la symétrie par rapport à $f_e/2$** parce que le signal a été échantillonné. On ne trace donc toujours que la partie comprise entre 0 et $f_e/2$, la seule intéressante.
- **la transformation de la raie à 1 kHz en lobe** de largeur $2/T$ à cause de l'effet de fenêtre

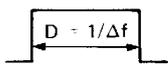
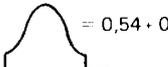
10) Choix de la forme de la fenêtre :

Nous avons déjà vu que le lobe en $\sin(X)/X$ provenait de la durée d'observation limitée, donc de la fenêtre temporelle T .

En fait, ce $\sin(X)/X$ n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la fenêtre. On pourra donc, en choisissant d'autres formes de fenêtres, agir sur la forme du spectre.

Dans la pratique, on recherche souvent les fenêtres de pondération qui diminuent l'amplitude des lobes secondaires.

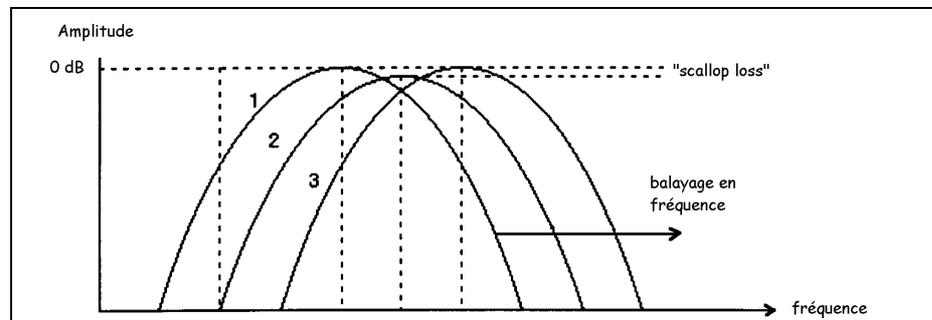
Figure 15. Exemple de fenêtres temporelles

Type de fenêtre	Forme de la fenêtre temporelle et équation correspondante	Allure du spectre en fréquence	Amplitude du 1er lobe secondaire par rapport au lobe central (dB)	Largeur du lobe central (à -3dB)	Largeur équivalente au bruit	Pente d'atténuation des lobes secondaires (dB/oct)
Rectangle (fenêtre naturelle)	 $D = 1/\Delta f$		- 13,2	$0,88 \Delta f$	Δf	6
Demi-sinusoïde	 $\sin \frac{\pi t}{D}$		- 22,4	$1,15 \Delta f$	$1,26 \Delta f$	12
Triangle (Bartlett)	 $\frac{2t}{D}$, de 0 à $\frac{D}{2}$ $2 - \frac{2t}{D}$, de $\frac{D}{2}$ à D		- 26,6	$1,28 \Delta f$	$1,33 \Delta f$	12
Cosinus carré (Hann)	 $\frac{1}{2} (1 + \cos \frac{\pi t}{D})$ $= \cos^2 (\frac{\pi t}{2D})$		- 31,6	$1,39 \Delta f$	$1,5 \Delta f$	18
Cosinus carré et décalage 8 % (Hamming)	 $0,08 + 0,46 (1 + \cos \frac{\pi t}{D})$ $= 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi t}{D}$		- 43,9	$1,26 \Delta f$	$1,36 \Delta f$	6 (à partir de $5 \Delta f$)

Le choix de la fenêtre a aussi une conséquence sur l'erreur d'amplitude liée à la nature discontinue du balayage en fréquence.

En effet, lorsqu'une raie du spectre tombe entre deux fréquences de calcul, l'amplitude de la raie affichée est inférieure à sa valeur réelle : c'est l'erreur appelée par les anglo-saxons « scallop loss ».

Figure 16. Exemple de fenêtres temporelles



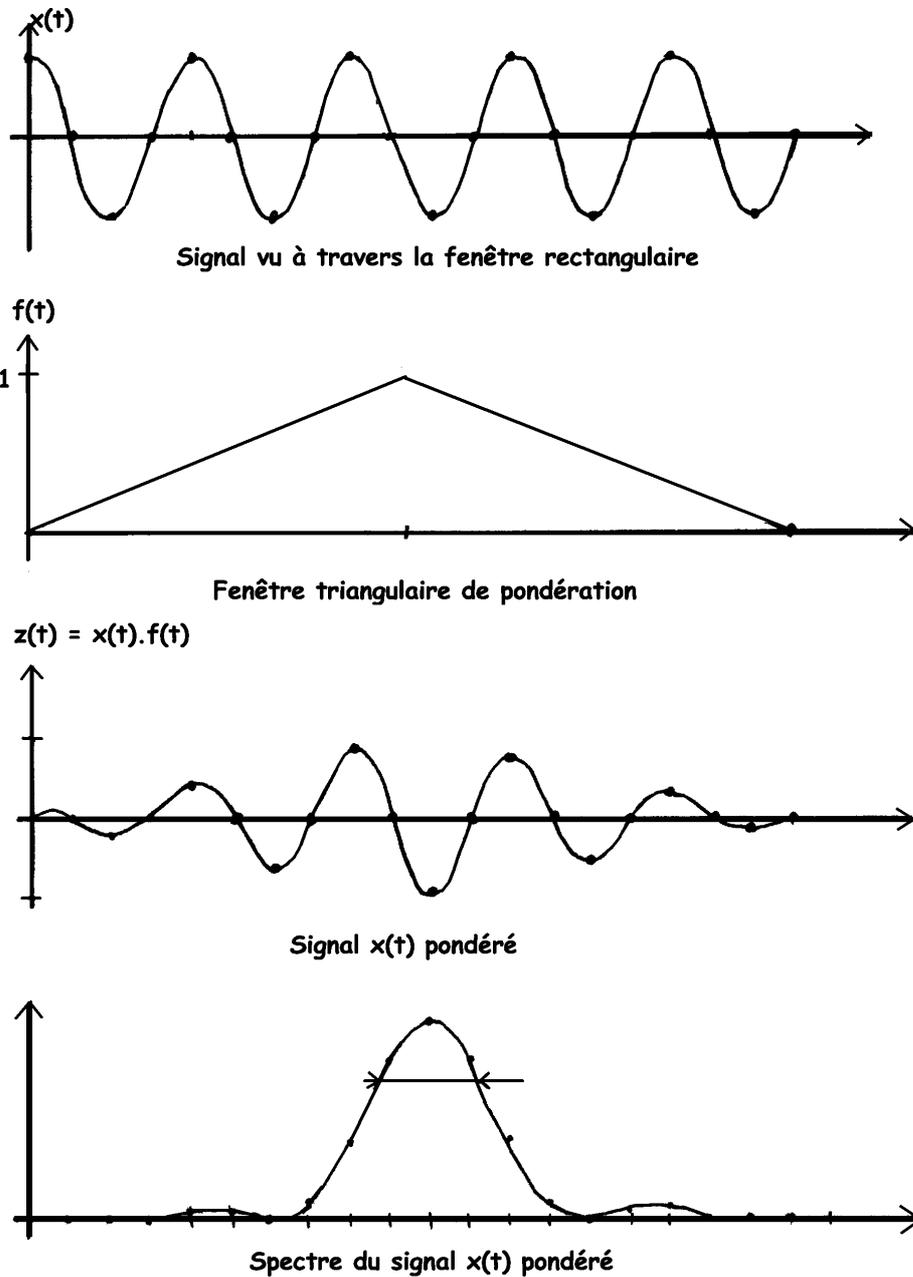
Les erreurs liées aux différentes fenêtres sont les suivantes :

Type de fenêtre	rectangulaire	Hamming	Hanning	Blackman/Harris
Erreur maximale	3,92 dB	1,78 dB	1,42 dB	0,81 dB

11) Exemple d'utilisation d'une fenêtre triangulaire :

Si on reprend le calcul du spectre d'un signal sinusoïdal précédent en pondérant les 20 échantillons du $\cos(\omega_0 t)$ par une fenêtre triangulaire, on obtient les résultats suivants :

Figure 17.
Influence de la
fenêtre sur la
forme du
spectre



La courbe du spectre montre une atténuation importante des lobes secondaires, au prix il est vrai d'un léger élargissement du lobe principal.

12) Applications à l'analyse de signaux complexes par FFT :

On distingue la limitation du spectre liée à la bande passante bornée à 3 kHz du canal téléphonique

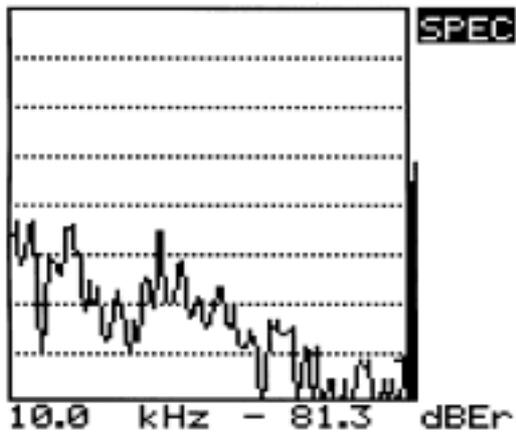


Figure 18. Voix humaine normale

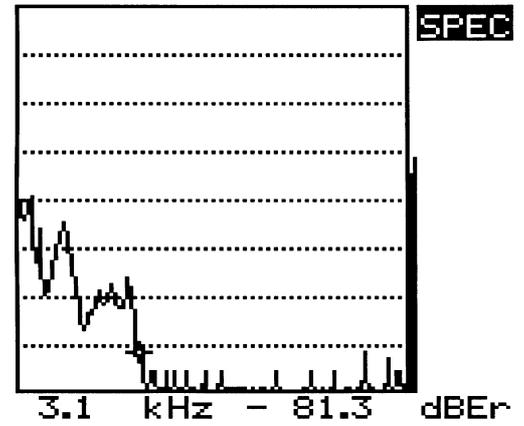
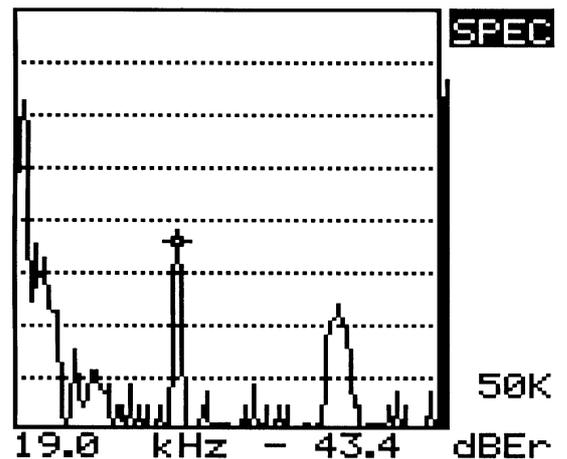


Figure 19. Voix humaine au téléphone

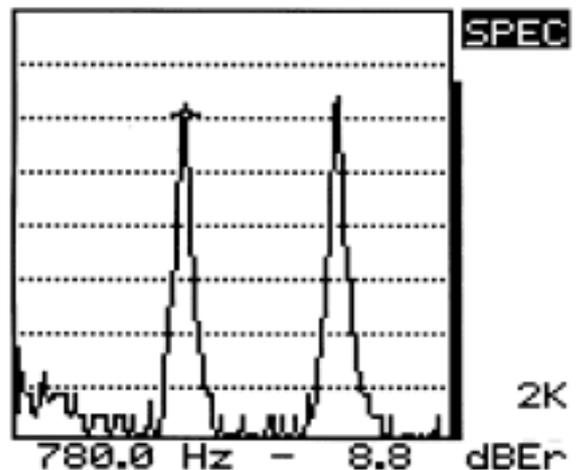
On voit sur ce spectre l'information somme (G+D), la porteuse à 19 kHz indiquant le codage stéréo et l'information de différence entre les canaux (G - D) modulée en bande latérale double à 38 kHz.

Figure 20.
Spectre du
signal stéréo en
sortie d'un
tuner FM



Numéro :	F1 :	F2 :
1	697 Hz	1209 Hz
2	-----	1336
3	-----	1477
4	770	1209
5	-----	1336
6	-----	1477
7	852	1209
8	-----	1336
9	-----	1477
0	941	1336

Figure 21.
Spectre d'un
signal DTMF



13) Applications à l'utilisation de la FFT en médecine:

Les médecins s'intéressent beaucoup actuellement au spectre des signaux physiologiques.

En effet, l'allure temporelle de ces signaux est souvent très difficile à l'interpréter et le calcul du spectre par FFT après échantillonnage leur apporte souvent des résultats intéressants.

Citons deux exemples parmi beaucoup d'autres :

- résultat d'une étude faite sur le **spectre du bruit respiratoire** à l'expiration (paru dans la revue Innov. Tech. Biol. Méd. de juillet 1988).

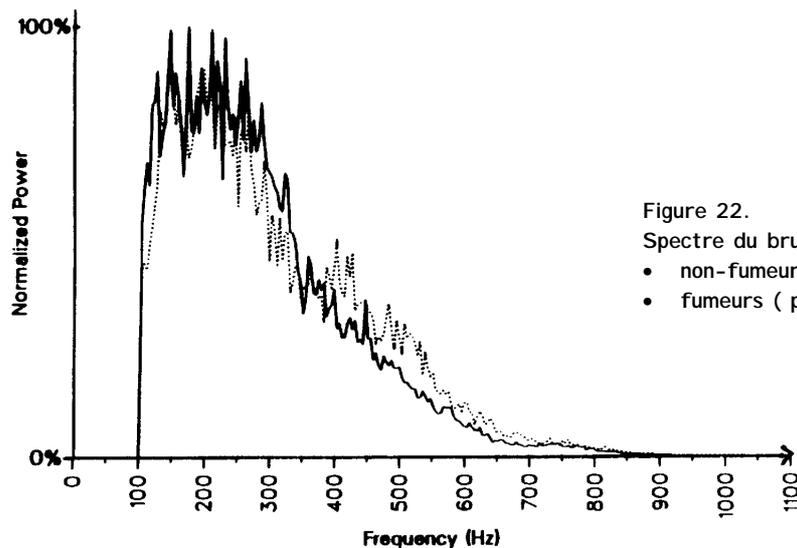


Figure 22.
Spectre du bruit de l'expiration :
• non-fumeurs (trait plein)
• fumeurs (pointillé)

On distingue très nettement la différence entre un fumeur et un non-fumeur !

- **l'étude spectrale des électroencéphalogrammes** fournit de indications sur les problèmes de fonctionnement du cerveau et permet de suivre le processus de guérison de façon atraumatique :

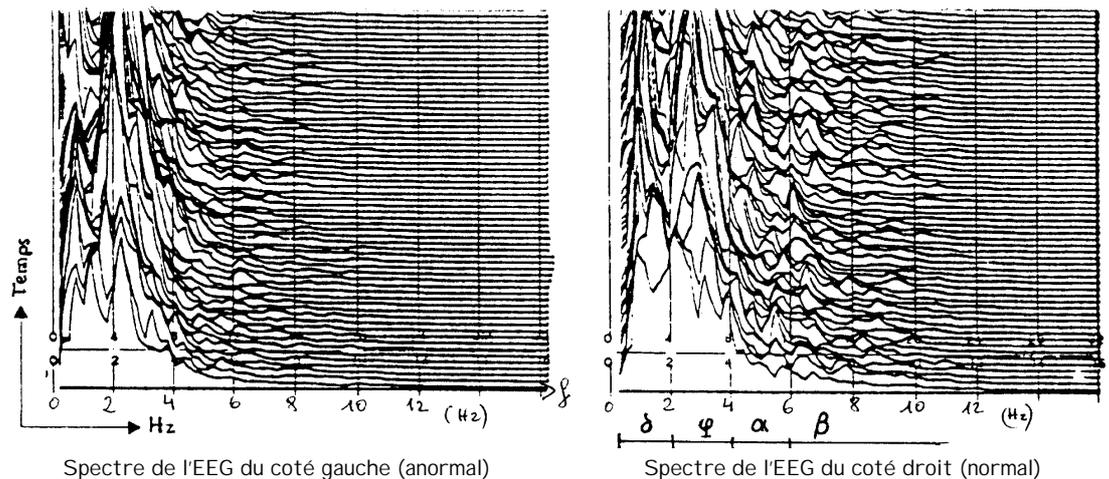


Figure 23. Spectres de l'EEG d'un homme de 73 ans, deux jours après une hémiparésie



Merci pour l'intérêt que vous portez à mon travail. J'espère que le cours que vous avez téléchargé répond à votre attente.

Si, malgré le soin qui a été apporté à la rédaction de ce document, vous constatez l'existence d'erreurs, merci de me les signaler par Email à jean-philippe.muller1@wanadoo.fr

Comme toute œuvre intellectuelle, ce document est protégé par le Copyright et son usage est réservé à une utilisation personnelle.

Techno Assistance Formation

1, rue du Capitaine Pilleux

68720 ZILLIHEIM

Site : <http://www.ta-formation.com>